CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 26 avril 1994

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
Durée : 2 heures - coefficient : 2

N.B :
- Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé, et d'indiquer clairement les numéros des questions traitées.
- Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
- Les candidats pourront admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement.
- Il sera tenu le plus grand compte dans la notation de la rigueur des raisonnements, de la précision de la rédaction et de la qualité de la présentation matérielle.
- **On justifiera avec soin la convergence des intégrales écrites.**

Pour une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs réelles, on note E(f) l'ensemble des réels s **strictement positifs** tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ converge **absolument.**

Dans tout le problème V désigne l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, pour lesquelles l'ensemble E(f) est **non vide.**

Pour f dans V, on note L(f) la fonction qui à s dans E(f) associe $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$.

Partie I

1°)
a) Montrer que pour f dans V l'ensemble E(f) est un intervalle non borné.
Dans la suite du problème, pour f dans V, on note I(f) l'intérieur de E(f).

b) Vérifier que V est un espace vectoriel sur IR.

c) Montrer que pour f et g dans V et λ dans IR, $L(\lambda f + g) = \lambda L(f) + L(g)$ sur $E(f) \cap E(g)$.

2°) On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, que f et f' sont dans V, et que

$$\forall s \in E(f), \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-st} f(t) = 0 .$$

Calculer, pour s dans $E(f) \cap E(f')$, $L(f')(s)$ en fonction de s, L(f) et f.

3°) Pour f et g dans V, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f * g$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f * g\,(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\,du .$$

a) Montrer que $f * g = g * f$.
b) Pour s dans $I(f) \cap I(g)$, calculer $L(f * g)(s)$ à l'aide de L(f)(s) et L(g)(s).

4°) Montrer que pour f dans V, L(f) est dérivable sur I(f) et calculer $L(f)' = \frac{d}{ds} L(f)$.

On notera (φ_n) la suite de fonctions définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in I(f), \varphi_n(s) = \int_0^n e^{-st} f(t)\,dt$.

Partie II

Pour α dans IR, on note e_α la fonction qui à t dans IR_+ associe $e^{\alpha t}$.

1°) Soit f appartenant à V. Pour des valeurs de s que l'on précisera à l'aide de E(f) et α, calculer $L(e_\alpha f)(s)$ en fonction de L(f), s et α.

2°) Pour f dans V telle que f(0) = 0, et a dans IR_+, soit g la fonction définie sur IR_+ par :

$$\forall t \in [0, a], \quad g(t) = 0 \quad , \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, +\infty[, \quad g(t) = f(t - a).$$

Vérifier que g est dans V et que E(g) est inclus dans E(f), et calculer L(g) à l'aide de L(f) et e_a.

3°) Pour α dans IR, déterminer $E(e_\alpha)$ et calculer $L(e_\alpha)$.

4°) Pour α dans IR, on note C_α la fonction qui à t dans IR_+ associe $\cos(\alpha t)$, et S_α la fonction qui à t dans IR_+ associe $\sin(\alpha t)$.

Déterminer $E(C_\alpha)$ et $E(S_\alpha)$, calculer $L(C_\alpha)$et $L(S_\alpha)$.

5°) Pour n dans IN, on note p_n la fonction qui à t dans IR_+ associe t^n. Déterminer $E(p_n)$et calculer $L(p_n)$.

6°) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. On note g sa somme.

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
b) Exprimer L(g)(s) comme somme d'une série de fonctions pour s >1.
c) Rappeler le développement en série entière de la fonction qui à u associe $(1 + u^2)^{-1/2}$.
Quel est son rayon de convergence ?
d) Reconnaître alors L(g)(s) pour s > 1.

Partie III

1°) On considère le système différentiel (1): $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$, où x et y sont deux fonctions inconnues de la variable t dérivables sur IR, et on cherche l'ensemble H des solutions (x,y) de (1) vérifiant les conditions x(0) = 8 et y(0) = 3.
On suppose l'existence d'une solution (x,y) dans H telle que x et y soient dans V. On note alors X = L(x) et Y = L(y).
a) Déterminer un système vérifié par X et Y.
b) Résoudre ce système.
c) En utilisant la partie II, en déduire une expression possible pour x et y.
d) En déduire H. **On justifiera soigneusement la réponse.**

2°) On considère l'équation (2) : $x'(t) + 5\displaystyle\int_0^t \cos[2(t-u)]\, x(u)\, du = 1$, où x désigne une fonction inconnue de la variable t dérivable sur IR, et on cherche l'ensemble S des solutions x de (2) vérifiant la condition x(0) = 1.
On suppose l'existence de x dans S telle que x soit aussi dans V. On note alors X = L(x).
a) Déterminer une équation vérifiée par X. On pourra utiliser **13°) b)**.
b) Résoudre l'équation obtenue.
c) En utilisant la partie II, en déduire une expression possible pour x.
d) En déduire S. **On justifiera soigneusement la réponse.**

3°) On considère l'équation (3) : $x'(t) + x(t - 1) = t^2$, où x désigne une fonction inconnue de la variable t dérivable sur IR, et on cherche l'ensemble W des solutions x de (3) vérifiant la condition x(t) = 0 pour $t \leq 0$.
On suppose l'existence de x dans W telle que x soit aussi dans V. On note alors X = L(x).
a) Déterminer une équation vérifiée par X.
b) Résoudre l'équation obtenue.
c) Développer sur [1, +∞[la fonction obtenue en séries de fonctions du type $\Psi_n = \dfrac{e_{-n}}{p_{n+4}}$, e_{-n} et p_{n+4} étant définies dans la partie II.
d) En déduire une expression possible pour x.
e) W est-il réduit à un singleton ? En déduire W. **On justifiera soigneusement la réponse.**
f) Pour x dans W, calculer une valeur approchée de x(4).